Jahrhunderträtsel
Von Christoph Drösser

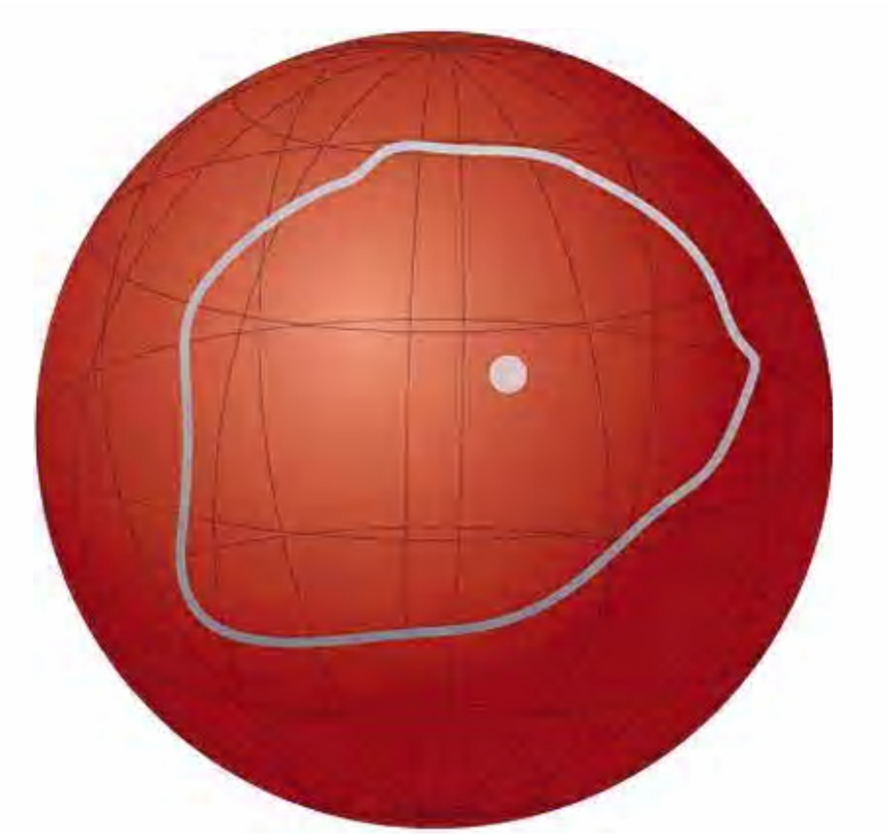

Abb. 1

Stellen Sie sich vor, Sie wären eine Ameise, die auf einer Kugeloberfläche lebt. Für das Krabbeltier sieht diese Fläche zunächst einmal so aus wie eine große Ebene, allenfalls kann man sich (wie unsere Vorväter) fragen, ob die Fläche begrenzt ist oder ob sie sich in unendliche Weiten erstreckt. Irgendwann wird vielleicht eine Ameise ähnlichen Mut aufbringen wie der erste Weltumsegler Vasco da Gama und feststellen, dass man nach einer Umrundung der Welt wieder am Ausgangspunkt landet – die Fläche ist endlich, aber randlos. Also schließt man messerscharf: Sie muss eine Kugel sein, oder?

Mathematisch gesehen ist das falsch. Die entsprechende Theorie, die Topologie, sagt nämlich: Es gibt auch noch andere geschlossene Flächen, die sich wesentlich von der Kugel unterscheiden. Da wäre etwa der Torus, die Oberfläche eines Autoreifens, der ein Loch in der Mitte hat; auch eine brezelartige Oberfläche mit zwei Löchern würde eine Ameise als »geschlossen« wahrnehmen.

Abb. 2

Wie also könnte der Bewohner einer solchen Fläche herausfinden, auf welcher Sorte er lebt? Die mathematische Antwort: indem er ein unendlich elastisches Gummiband auf alle möglichen Arten um seine Welt spannt. Wenn es in jedem Fall auf einen einzelnen Punkt zusammenschnurrt, lebt man auf einer kugelähnlichen Welt (Abb. 1). Auf Autoreifen und Brezeln kann man dagegen das Gummi immer so spannen, dass es sich nicht zusammenziehen lässt, weil eines der Löcher im Weg ist (Abb. 2, 3).

Die Eigenschaft mit dem stets zusammenziehbaren Gummi nennen die Mathematiker »einfach zusammenhängend«, und seit langem ist bewiesen: Alle geschlossenen, einfach zusammenhängenden Flächen sind Verformungen einer Kugeloberfläche. Aber wie sieht die Sache in höheren Dimensionen aus? Mathematiker haben ja keine Probleme, mit beliebig hohen Dimensionen zu rechnen, und deshalb denken sie auch über Sphären im vierdimensionalen Raum nach, deren »Rand« ein endlicher, aber unbegrenzter dreidimensionaler Raum ist. So abwegig ist das auch gar nicht: Das Weltall sieht aus unserer »lokalen« Sicht aus wie ein in alle Richtungen unendlicher Raum, aber letztlich geht es uns auch nur wie Ameisen, die wenig über seine große Struktur wissen.

Abb. 3

Die naheliegendste Vermutung ist: Auch in drei und mehr Dimensionen gilt, was in zwei Dimensionen richtig ist, nämlich dass alle einfach zusammenhängenden Räume im Prinzip der n-dimensionalen Kugel-»Oberfläche« ähneln. Genau das ist die Poincarésche Vermutung, die die Mathematiker beschäftigt, seit der französische Mathematiker Henri Poincaré das Problem im Jahr 1904 als Erster formulierte. Interessanterweise ist die Frage für alle höheren Dimensionen längst geklärt. Nur die dritte Dimension sträubte sich bislang – just das Universum, in dem wir leben, ist mathematisch am anspruchsvollsten. Immer wieder glaubten von der »Poincaritis« befallene Mathematiker, die Lösung gefunden zu haben, aber alle Beweise waren fehlerhaft. Die vom amerikanischen Clay-Institut im Jahr 2000 ausgelobte Preis-Million konnte bisher nicht ausgezahlt werden.

Einen großen Schritt hin zum Beweis der Vermutung machte der Mathematiker Richard Hamilton von der Columbia-Universität im Jahr 1982. Er überlegte, wie man exotische geometrische Formen auf eine Standard-Gestalt zurückführen könne, und kam auf den so genannten Ricci- Fluss, der sich von den Gleichungen zur Temperaturverteilung in festen Körpern ableitet. Wenn ein Gegenstand an verschiedenen Stellen unterschiedlich heiß ist, dann beginnen Energieströme zu fließen – so lange, bis es überall gleich warm ist. Ähnlich soll der Ricci-Fluss die Buckel und Dellen eines dreidimensionalen Körpers auf die Dauer ausgleichen, bis er einer von wenigen Standardformen gleicht – unter anderem sollen so alle einfach zusammenhängenden Körper zu einer Sphäre werden. Das klappte auch in vielen Fällen, nur manchmal bildeten sich die von Mathematikern gefürchteten Singularitäten – Punkte, an denen die Dichte des Flusses plötzlich unendlich große Werte annimmt. Grigorij Perelmans Verdienst ist es, dass er eine Strategie aufgezeigt hat, mit der man diese Singularitäten behandeln kann – sie lassen sich auf »gutartige« Weise aus dem Körper herausschneiden. Die drei Arbeiten, die er im Internet veröffentlichte, zeigen die Strategie dafür auf, in den vergangenen Monaten sind die Details von anderen Mathematikern ausgefüllt worden. Die herrschende Meinung im Jahr 2006 lautet: Das Jahrhundertproblem ist gelöst.

Christoph Drösser DIE ZEIT, 24.08.2006 Nr. 35