

Die Insel der Fragensteller

Irgendwo in den unermesslichen Weiten des Ozeans gibt es ein seltsames Eiland, das als die „Insel der Fragensteller“ bekannt ist. Ihr Name rührt her von dem Umstand, dass ihre Bewohner niemals Aussagen treffen, sondern lediglich Fragen stellen.

Die Bewohner stellen also nur Fragen, auf die man mit Ja oder Nein antworten muss. Jeder Bewohner gehört zu einer von zwei Gruppen, A und B. Diejenigen des Typs A stellen nur solche Fragen, auf die man korrekterweise mit Ja antwortet; die übrigen der Kategorie B stellen hingegen Fragen, deren richtige Antwort Nein ist.

Zum Beispiel könnte ein Bewohner des Typs A fragen: „Ist zwei plus zwei gleich vier?“ Er kann jedoch nicht fragen, ob zwei plus zwei fünf ist.

Ein Insulaner der Kategorie B kann nicht fragen, ob zwei plus zwei vier beträgt, aber er kann fragen, ob zwei plus zwei fünf beträgt oder sechs.

1. Rätsel ¹

Angenommen, Du triffst einen Eingeborenen dieser Insel, und er fragt Dich: „Gehöre ich Typ B an?“

Was würdest Du daraus schließen?

2. Rätsel

Weiter angenommen, er hätte Dich gefragt, ob er zur Gruppe A gehört.

Was hättest Du daraus gefolgert?

5. Rätsel

Angenommen, Du triffst ein Ehepaar, das den Nachnamen Gordon hat. Herr Gordon fragte seine Frau: „Gehören wir zu verschiedenen Gruppen, Liebling?“

Welchen Schluss kann man über jeden der beiden ziehen?

10. Rätsel ²

Angenommen, Du triffst drei Schwestern namens Alice, Betty und Cynthia.

Alice fragte Betty: „Gehörst du zu der Kategorie von Leuten, die Cynthia fragen können, ob sie dem Typ angehört, der dich fragen kann, ob ihr zwei verschiedenen Typen zuzurechnen seid?“

Du wirst feststellen, dass es lediglich möglich ist, **eine** Kategorie unter den drei Damen zu bestimmen.

Um welche Dame handelt es sich und welchem Typ ist sie zuzuordnen?

ACHTUNG: Es folgen die Lösungen!

¹ Die Nummerierung der Rätsel ist dem Buch entnommen. Daher die Lücken ...

² Dieses Rätsel haben wir nicht lösen können, und in der Tat ist es recht schwierig und langwierig, weil vorherige Lösungen benötigt werden, die wir noch nicht bearbeitet hatten.

Lösungen

1. Rätsel

Für jeden Einheimischen dieser Insel ist es unmöglich, eine solche Frage zu stellen. Wenn ein Einwohner der Gruppe A fragt: „Gehöre ich zu Typ B?“, so ist die richtige Antwort Nein (da er ja nicht B angehört); doch ein A -Typ kann keine Frage mit der Antwort Nein stellen. Darum kann kein Einheimischer des A-Typs so etwas fragen. Wenn nun ein Insulaner des Typs B die Frage stellt, so ist die richtige Antwort Ja (da er ja *wirklich* zu B gehört); doch kann kein B-Typ eine Frage mit der Antwort Ja stellen. Deshalb kann ein Bewohner des Typs B ebenso wenig so etwas fragen.

2. Rätsel

Hieraus kann nichts gefolgert werden. Jeder Einwohner dieser Insel kann fragen, ob er zu Typ A zählt, egal ob er wirklich Typ A angehört oder Typ B. Gehört er zur Gruppe A, so heißt die richtige Antwort auf die Frage „Bin ich ein A -Typ?“ in der Tat Ja, und jeder A -Typ kann jede Frage mit der Antwort Ja stellen.

Wenn andererseits der Fragensteller zur Kategorie B zählt, dann heißt die richtige Antwort darauf Nein, und jeder Bewohner des B -Typs kann eine Frage mit der Antwort Nein stellen.

5. Rätsel

Über Herrn Gordon kann nichts ausgesagt werden, Frau Gordon hingegen muss Gruppe B angehören. Aus folgendem Grund:

Herr Gordon gehört entweder zu Typ A oder B.

Vorausgesetzt, er gehört zu A, dann ist die richtige Antwort auf seine Frage Ja, was bedeutet, dass beide verschiedenen Typen angehören. Dies heißt wiederum, dass Frau Gordon ein B-Typ sein muss (da wir angenommen hatten, er gehöre zu A, und beide ja verschiedenen Gruppen zuzurechnen sind). Wenn also Herr Gordon ein A -Typ ist, so muss Frau Gordon ein B -Typ sein.

Nunmehr angenommen, Herr Gordon gehört zu B, dann ist die richtige Antwort auf seine Frage Nein, was bedeutet, dass beide nicht verschiedenen Typen angehören; sie gehören zum selben Typ. Das heißt, Frau Gordon ist wieder ein B-Typ. Wenn also Herr Gordon zu B zählt, dann Frau Gordon ebenfalls.

Das beweist, dass egal, ob Herr Gordon ein A- oder ein B-Typ ist, Frau Gordon zum Typ B gehört.

Eine andere Beweisführung - sehr viel einfacher, doch auch raffinierter - geht folgendermaßen:

Wir wissen bereits von der ersten Aufgabe, dass niemand auf dieser Insel fragen kann, ob er zu B gehört. Nun, wenn Frau Gordon ein A-Typ wäre, dann entspräche die Frage, ob Herr Gordon einem anderen Typ als Frau Gordon angehöre, der Frage, ob er ein B -Typ sei. Und so etwas kann er nicht fragen. Also kann Frau Gordon nicht zu Typ A gehören.

10. Rätsel

Es ist am leichtesten, bei der Lösung dieser Aufgabe schrittweise vorzugehen. Als erstes stellen wir ganz einfach folgende Behauptungen auf:

Behauptung 1: Einen beliebigen Bewohner X des Typs A kann kein anderer Bewohner fragen, ob er/sie und X verschiedenen Typen angehören.

Behauptung 2: Einen beliebigen Bewohner X des Typs B kann jeder andere Bewohner fragen, ob er/sie und X zu verschiedenen Typen zählen.

Behauptung 1 wurde bereits in der Lösung der Aufgabe 5 bewiesen. Wir erfuhren dort, dass Frau Gordon zum Typ A zählte, und Herr Gordon sie nicht fragen konnte, ob er und sie demselben Typ angehörten.

Was Behauptung 2 betrifft - X gehört zu B -, so ist die Frage, ob jemand zu einem andern Typ gehört als dem, zu dem X zählt, gleichbedeutend mit der Frage, ob jemand ein A-Typ ist.

Wie wir bereits in der Lösung zu Aufgabe 2 gesehen haben, kann jeder diese Frage stellen. Also kann jeder X fragen, ob er/sie zu einem andern Typ gehört, wenn X ein B - Typ ist.

Nun zu unserer Aufgabe: Wir werden nachweisen, dass die richtige Antwort auf Alices Frage Nein ist und sie insofern zum Typ B gehören muss. Mit anderen Worten, wir werden nachweisen, dass es für Betty nicht möglich ist, Cynthia zu fragen, ob letztere zu dem Typ zählt, der Betty fragen kann, ob Cynthia und Betty verschiedenen Gruppen angehören.

Angenommen, Betty fragt Cynthia, ob Cynthia zu fragen vermag, ob Cynthia und Betty zu verschiedenen Typen zählen.

Wir kommen zu folgendem Widerspruch: Betty gehört entweder Typ A oder Typ B an.

Angenommen, Betty ist ein A-Typ, dann kann Cynthia Behauptung 1 zufolge nicht fragen, ob sie und Betty verschiedenen Gruppen angehören. Denn die Antwort auf Bettys Frage wäre Nein, was nicht möglich ist, da Betty zu A gehört!

Nehmen wir andererseits an, Betty sei ein B -Typ, dann könnte Cynthia Behauptung 2 zufolge fragen, ob sie und Betty zu verschiedenen Typen zählen, und die richtige Antwort auf Bettys Frage wäre Ja, was jedoch nicht möglich ist, da Betty ja ein B -Typ ist.

Damit ist bewiesen, dass Betty niemals Cynthia die Frage stellen kann, von der Alice wissen möchte, ob Betty sie stellen kann.

Somit ist die richtige Antwort auf Alices Frage Nein; Alice gehört demnach zu Typ B.

Die Typen, zu denen Betty und Cynthia zählen, können nicht bestimmt werden.