Ableitung

Differenzenquotient (<u>Mittlere</u> Änderungsrate) im Intervall $[x_0; x_1]$	$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$
bzw. für $x_1=x_0+h$ im Intervall $[x_0; x_0+h]$	$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
Ableitung von f an der Stelle x_0 (<u>Momentane</u> Änderungsrate)	$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
Ableitung (Ableitungsfunktion) von f	$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Ableitungsregeln ($a,b,c\in\mathbb{R}$, const.)

$f(x) = c$	$f'(x) = 0$	$f(x) = a \cdot \sin(x)$	$f'(x) = a \cdot \cos(x)$
$f(x) = c \cdot g(x)$	$f'(x) = c \cdot g'(x)$	$f(x) = a \cdot \sin(bx)$	$f'(x) = ab \cdot \cos(bx)$
$f(x) = g(x) + h(x)$	$f'(x) = g'(x) + h'(x)$	$f(x) = a \cdot \cos(x)$	$f'(x) = -a \cdot \sin(x)$
$f(x) = x^r$, $r\in\mathbb{Q}$	$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$	$f(x) = a \cdot \cos(bx)$	$f'(x) = -ab \cdot \sin(bx)$

Schnittstelle(n) mit der

x-Achse (Nullstellen)	$f(x) = 0$	y-Achse	$y = f(0)$

Symmetrie

zur y-Achse	$f(x) = f(-x)$	zum Ursprung	$f(x)= -f(-x)$

Monotonie

f heißt streng monoton $\left.\begin{matrix}\text{steigend } (\textit{wachsend, zunehmend})\\ \text{fallend } (\textit{abnehmend})\end{matrix}\right\}$ in dem Intervall (a,b),

wenn für alle $x_1, x_2 \in (a,b)$ mit $x_1 < x_2$ folgt: $\left.\begin{matrix}f(x_1) < f(x_2)\\ f(x_1) > f(x_2)\end{matrix}\right\}$.

Ist $\left.\begin{matrix}f'(x) > 0\\ f'(x) < 0\end{matrix}\right\}$ für alle $x\in(a,b)$, dann ist f streng monoton $\left.\begin{matrix}\text{steigend}\\ \text{fallend}\end{matrix}\right\}$.

Summenzeichen

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \quad \left(\textit{Beispiel}: \sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55\right)$$

Folgen und Reihen

Arithmetische Folge

$a_{n+1} - a_n = d$

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

Arithmetische Reihe

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(a_1 + (k-1)\cdot d) = n\cdot a_1 + \frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot d$$
$$= \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n)$$

Beispiel: Die Summe der ersten 5 natürlichen Zahlen 1+2+3+4+5 ist $s_5 = 5\cdot 1 + \frac{5\cdot 4}{2}\cdot 1 = 15$

($a_1 = 1$, n=5, d=1)

Geometrische Folge

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ ($q\in\mathbb{R}$, $q \neq 0$, $a_n \neq 0$)

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Geometrische Reihe

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 \cdot q^{k-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Beispiel: Die Summe der ersten 5 Potenzen von 3 $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5$ ist $s_5 = 3\cdot\frac{3^5-1}{3-1} = 363$

($a_1 = 3$, n=5, q=3)

Vektoren

Gegeben sind die **Vektoren** $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ und die **Skalare** a, b $\in \mathbb{R}$.

Dann gilt: $\vec{u} \pm \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \pm v_1 \\ u_2 \pm v_2 \\ u_3 \pm v_3 \end{pmatrix}$ $\quad a \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} a \cdot u_1 \\ a \cdot u_2 \\ a \cdot u_3 \end{pmatrix}$ $\quad -\vec{u} = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ -u_3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Regeln: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

$a \cdot (b \cdot \vec{u}) = ab \cdot (\vec{u})$

$a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$

$(a + b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}$

$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Vektor von Punkt $A(a_1|a_2|a_3)$ **zu Punkt** $B(b_1|b_2|b_3)$:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$ Es gilt: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Abstand zweier Punkte A und B:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

Betrag (Länge) eines Vektors:

$|\vec{u}| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}$

Geraden

Gegeben sind die **Geraden**: $g : \vec{x} = \vec{u} + a \cdot \vec{v}$ und $h : \vec{x} = \vec{w} + b \cdot \vec{z}$

$\vec{u}$ und $\vec{w}$ sind die jeweiligen **Stützvektoren,** $\vec{v}$ und $\vec{z}$ sind die jeweiligen **Richtungsvektoren**

g und h sind **parallel** (g || h), wenn es einen Skalar r gibt, so dass gilt: $r \cdot \vec{v} = \vec{z}$ oder $r \cdot \vec{z} = \vec{v}$.

g und h sind **identisch** (g ≡ h), wenn sie parallel sind und wenn ein Punkt A von g auch auf h liegt ($A \in g \Rightarrow A \in h$).

g und h **schneiden sich**, wenn es eindeutige Zahlen a, b $\in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt:

$\vec{u} + a \cdot \vec{v} = \vec{w} + b \cdot \vec{z}$

g und h sind **windschief**, wenn sie nicht parallel sind und sich nicht schneiden.

Elaboración de gráficas *(Kurvendiskussion)*

1. Investigación de la función *(Untersuchung der Funktion)* **f(x)**

$f(x)=$

1.1 Intersecciones con los ejes de coordenadas *(Schnittstellen mit den Koordinatenachsen)*

- Ceros *(Nullstellen)* $P(x_N|0)$
  Ponga *(Setze)* $f(x) = 0$
- Intersección con el eje y *(Schnittstellen mit der y-Achse)* $P(0|\ x_S)$
  Calcule *(Berechne)* $f(0)$

1.2 Dominio *(Definitionsbereich)*

- Normalmente: $\mathbb{D}=\mathbb{R}$
- En caso de $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$: $\mathbb{D}=\mathbb{R} \setminus$ los valores x, que son ceros de $q(x)$
- En caso de $f(x) = \sqrt{g(x)}$: $\mathbb{D}=\mathbb{R} \setminus$ los valores x, donde $g(x) < 0$.

1.3 Simetría *(Symmetrie)*

- Con respecto al eje y *(Achsensymmetrie zur y-Achse)*: $f(-x) = f(x)$
- Con respecto al origen *(Punktsymmetrie zum Ursprung)*: $f(-x) = -f(x)$

1.4 Qué occure en el infinito *(Verhalten im Unendlichen)* y cerca del cero *(in der Nähe von 0)?*

$\lim_{x\to\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to 0} f(x)$

2. Halle la derivada *(Berechne die Ableitung)*

$f'(x)=$

3. Investigación con la derivada *(Untersuchungen mit der Ableitung)* $f'(x)$

3.1 Puntos estacionarios *(Stationären Punkte, d.h. Extremstellen)*

a) Ponga *(Setze)* $f'(x)= 0$ p.e. encontre x_1, x_2, x_3

b) Halle los puntos $P_1(x_1|\ f(x_1)), \dots, P_3(x_3|\ f(x_3))$

3.2 Monotonia: Haga una tabla como sigue para determinar en dónde la gráfica es creciente y en dónde es decreciente *(Monotonie: Erstelle eine Tabelle wie folgt um festzustellen, wo der Graph steigt und fällt)*

<u>Ejemplo:</u> (VZW = Vorzeichenwechsel, sms=streng monoton steigend, smf=streng monoton fallend)

	$-\infty<x<x_1$	x_1	$x_1<x<x_2$	x_2	$x_2<x<x_3$	x_3	$x_3<x<\infty$
$f'(x)$	>0	=0	<0	=0	<0	=0	>0
$sgn(f'(x))$	+	VZW	–	Kein VZW	–	VZW	+
G_f	sms		smf		smf		sms
		P_1=max		*P_2=Sattelpunkt*		*P_3=min*	

4. Dibuje la grafica. *(Zeichne den Graphen der Funktion!)*

4.1 Verwende die bislang ermittelten Eigenschaften.

Erstelle bei Bedarf eine Wertetabelle für zusätzliche Punkte.

4.2 Gib den Wertebereich $\mathbb{W}$ an. *(entsprechend der Zeichnung und ggf. der Wertetabelle)*