1. Eigenschaften von Zahlenfolgen

Definition 1: Eine Zahlenfolge (a_n) heißt $\left.\begin{matrix}\text{monoton steigend}\\ \text{streng monoton steigend}\\ \text{monoton fallend}\\ \text{streng monoton fallend}\end{matrix}\right\}$, wenn für alle n ∈ ℕ gilt $\left.\begin{matrix}a_{n+1} \geq a_n\\ a_{n+1} > a_n\\ a_{n+1} \leq a_n\\ a_{n+1} < a_n\end{matrix}\right\}$.

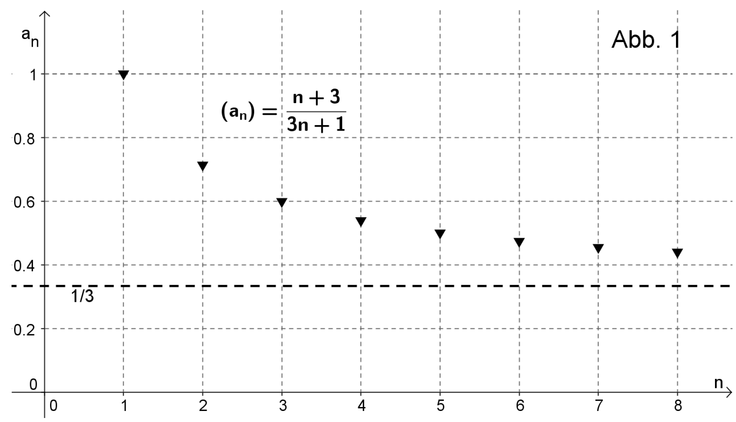
Die Monotonie von Zahlenfolgen kann man häufig am besten untersuchen, wenn man die Ungleichungen der Definition umformt. Es ergibt sich:

Wenn $\left.\begin{matrix}a_{n+1} - a_n \geq 0\\ a_{n+1} - a_n > 0\\ a_{n+1} - a_n \leq 0\\ a_{n+1} - a_n < 0\end{matrix}\right\}$ für alle n ∈ ℕ ist, dann ist (a_n) $\left.\begin{matrix}\text{monoton steigend}\\ \text{streng monoton steigend}\\ \text{monoton fallend}\\ \text{streng monoton fallend}\end{matrix}\right\}$.

Sind alle Folgenglieder $a_n > 0$, gilt außerdem:

Wenn $\left.\begin{matrix}\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1\\ \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1\\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1\\ \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1\end{matrix}\right\}$ und $a_n > 0$ für alle n ∈ ℕ ist, dann ist (a_n) $\left.\begin{matrix}\text{monoton steigend}\\ \text{streng monoton steigend}\\ \text{monoton fallend}\\ \text{streng monoton fallend}\end{matrix}\right\}$.

Beispiel 1: Die Folge $(a_n) = \left(\frac{n+3}{3n+1}\right) = 1, \frac{5}{7}, \frac{3}{5}, \frac{7}{13}, \frac{1}{2}, \ldots$ ist streng monoton fallend.



Beweis: Wir müssen zeigen, dass für alle n ∈ ℕ $a_{n+1} - a_n < 0$ gilt:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+4}{3n+4} - \frac{n+3}{3n+1}$$
$$= \frac{(n+4)(3n+1)-(n+3)(3n+4)}{(3n+4)(3n+1)}$$
$$= \frac{3n^2+13n+4-\left(3n^2+13n+12\right)}{(3n+4)(3n+1)}$$
$$= \frac{-8}{(3n+4)(3n+1)}$$

< 0, weil der Zähler negativ und der Nenner wegen n ∈ ℕ positiv ist.

Beispiel 2: Die Folge $(a_n) = (n^2 - 25n) = -24, -46, -66, -84, -100, \ldots$ ist **nicht** monoton.

Beweis: $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - 25(n+1) - (n^2 - 25n) = 2n - 24$

Für n<12 gilt zwar $a_{n+1} - a_n < 0$, aber für n>12 ist $a_{n+1} - a_n > 0$. Also ist (a_n) nicht monoton.

Definition 2: Eine Zahlenfolge (a_n) heißt $\left.\begin{matrix}\text{nach oben beschränkt}\\ \text{nach unten beschränkt}\end{matrix}\right\}$, wenn es eine Zahl **s** ∈ ℝ gibt, so dass für alle Folgenglieder a_n gilt: $\left.\begin{matrix}a_n \leq s\\ a_n \geq s\end{matrix}\right\}$. Die Zahl **s** nennt man $\left.\begin{matrix}\text{obere Schranke}\\ \text{untere Schranke}\end{matrix}\right\}$ der Zahlenfolge (a_n).

Wenn alle Glieder in einem Intervall [–s,s] liegen, wenn also $|a_n| \leqq s$ für alle n ∈ ℕ gilt, dann heißt die Zahl s einfach nur **Schranke**.

Eine Zahlenfolge (a_n) heißt **beschränkt**, wenn sie eine obere und eine untere Schranke hat.

Beispiel 3: Die Folge $(a_n) = \left(\frac{n+3}{3n+1}\right)$ aus Beispiel 1 ist beschränkt: Die obere Schranke ist s_o=1, die untere Schranke ist $s_u = \frac{1}{3}$.

Beweis: Wenn s_o=1 eine obere Schranke ist, dann muss für alle n ∈ ℕ gelten: $a_n < 1$ bzw. $1 - a_n > 0$

$1 - \frac{n+3}{3n+1} = \frac{3n+1-(n+3)}{3n+1} = \frac{2n-2}{3n+1} \geqq 0$, weil Zähler und Nenner größer als 0 (=0) sind für alle natürlichen Zahlen.

Wenn $s_u = \frac{1}{3}$ eine untere Schranke ist, dann muss für alle n ∈ ℕ gelten: $a_n > \frac{1}{3}$ bzw. $a_n - \frac{1}{3} > 0$.

$\frac{n+3}{3n+1} - \frac{1}{3} = \frac{3(n+3)-(3n+1)}{(3n+1)\cdot 3} = \frac{8}{9n+3} > 0$, weil Zähler und Nenner größer als 0 sind für alle natürlichen Zahlen.

Und woher wissen wir in Beispiel 3, dass $\frac{1}{3}$ eine untere Schranke ist? Weil dies der Grenzwert der Folge ist!

Definition 3: Eine Zahl **g** heißt **Grenzwert** einer Zahlenfolge (a_n), wenn fast alle Folgenglieder beliebig nahe bei g liegen. Man schreibt: $\mathbf{\lim_{n\to\infty} a_n = g}$.

Eine Zahlenfolge (a_n), die einen Grenzwert hat, heißt **konvergent**; hat sie keinen, heißt sie **divergent**.

Eine Zahlenfolge (a_n), die gegen 0 konvergiert (den Grenzwert 0 hat), heißt **Nullfolge**.

Beispiel 4: Die Folge $(a_n) = \left(\frac{n+3}{3n+1}\right)$ aus Beispiel 1 konvergiert und hat den Grenzwert $g = \frac{1}{3}$.

Beweis: $\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{3n+1}$ Wir klammern im Zähler und Nenner das "n" aus.

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}$ Wir kürzen mit n.

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$ Für $n \to \infty$ gehen die Brüche im Zähler und Nenner gegen 0.

Es gilt: Der Grenzwert einer Folge von Brüchen hängt vom **Zählergrad (ZG)** und **Nennergrad (NG)** ab:

ZG < NG ⇒ g = 0 Beispiel: $\left(\frac{n+3}{3n^2+1}\right)$ ist Nullfolge: ZG=1, NG=2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{3n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{3}{n})}{n(3n+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n} = 0$$

ZG > NG ⇒ Die Folge ist divergent Beispiel: $\left(\frac{n^2+3}{3n+1}\right)$ hat keinen Grenzwert: ZG=2, NG=1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+\frac{3}{n})}{n(3+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3} = \infty$$

ZG = NG ⇒ g ist der Quotient der beiden Koeffizienten der höchsten Potenzen im Zähler und Nenner

Beispiel: ZG=NG=3 $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+n^2+3}{3n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3})}{n^3(3+\frac{1}{n^3})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}}{3+\frac{1}{n^3}} = \frac{2}{3}$

Aufgaben

Aufgabe 22: Untersuche die Monotonie!

a) $(a_n) = \left(\frac{3}{4n}\right)$ b) $(a_n) = \left(\frac{4n+1}{n+3}\right)$ c) $(a_n) = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)$ d) $(a_n) = \left(\frac{1-n^2}{n}\right)$

Aufgabe 23: Zeige, dass die Folge beschränkt ist!

a) $(a_n) = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)$ b) $(a_n) = \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)$ c) $(a_n) = \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)$ d) $(a_n) = (-1)^n$

Aufgabe 24: Untersuche das Konvergenzverhalten!

a) $(a_n) = \left(\frac{3}{4n}\right)$ b) $(a_n) = \left(\frac{4n+1}{n+3}\right)$ c) $(a_n) = \left(\frac{1-n}{1+n^2}\right)$ d) $(a_n) = \left(\frac{1-n^2}{n}\right)$

Lösungen

Aufgabe 22: Untersuche die Monotonie!

a) $(a_n) = \left(\frac{3}{4n}\right)$ $\quad a_{n+1} - a_n = \frac{3}{4n+4} - \frac{3}{4n} = \frac{3\cdot 4n - 3\cdot(4n+4)}{4n\cdot(4n+4)} = \frac{-12}{4n\cdot(4n+4)} < 0 \;\Rightarrow\; (a_n)$ ist streng monoton fallend.

b) $(a_n) = \left(\frac{4n+1}{n+3}\right)$ $\quad a_{n+1} - a_n = \frac{4n+5}{n+4} - \frac{4n+1}{n+3} = \frac{(n+3)\cdot(4n+5)-(n+4)\cdot(4n+1)}{(n+4)\cdot(n+3)} = \frac{(n+3)\cdot(4n+5)-(n+4)\cdot(4n+1)}{(n+4)\cdot(n+3)} = \frac{11}{(n+4)\cdot(n+3)} > 0$
$\Rightarrow (a_n)$ ist streng monoton steigend.

c) $(a_n) = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)$ $\quad a_{n+1} - a_n = \frac{1-(n+1)}{1+(n+1)} - \frac{1-n}{1+n} = \frac{-n}{n+2} < 0 \;\Rightarrow\; (a_n)$ ist streng monoton fallend.

d) $(a_n) = \left(\frac{1-n^2}{n}\right)$ $\quad a_{n+1} - a_n = \frac{1-(n+1)^2}{n+1} - \frac{1-n^2}{n} = \frac{-n^2-2n-(1-n^2)}{(n+1)\cdot n} = \frac{-(2n+1)}{(n+1)\cdot n} < 0 \;\Rightarrow\; (a_n)$ ist streng monoton fallend.

Aufgabe 23: Zeige, dass die Folge beschränkt ist!

a) $(a_n) = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)$ $\quad a_1 = \frac{2}{3}$,
$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)\cdot(n+3)-(n+1)\cdot(n+3)}{(n+3)\cdot(n+2)} = \frac{n+3}{(n+3)\cdot(n+2)} > 0 \Rightarrow (a_n)$ ist streng monoton steigend,
$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = 1 \;\Rightarrow\; (a_n)$ ist konvergent mit dem Grenzwert 1 $\;\Rightarrow\; \frac{2}{3} \le a_n < 1$

(im Folgenden zur Ermittlung der unteren Schranke bitte den Grenzwert berechnen!)

b) $(a_n) = \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)$ ist beschränkt mit $\frac{2}{3} < a_n \le \frac{3}{2}$
obere Schranke = $a_1 = \frac{3}{2}$, untere Schranke: $a_n - \frac{2}{3} = \frac{2n+1}{3n-1} - \frac{2}{3} = \frac{(2n+1)\cdot 3 - 2\cdot(3n-1)}{3\cdot(3n-1)} = \frac{5}{3\cdot(3n-1)} > 0$

c) $(a_n) = \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)$ ist beschränkt mit $0 < a_n \le 1$
obere Schranke = $a_1 = 1$, untere Schranke: $a_n - 0 = \frac{1+n}{1+n^2} > 0$

d) $(a_n) = (-1)^n$ Die Folge nimmt nur die Werte -1 und 1 an, ist also beschränkt.

Aufgabe 24: Untersuche das Konvergenzverhalten!

a) $(a_n) = \left(\frac{3}{4n}\right)$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4n} = 0$ $\quad (a_n)$ ist Nullfolge, also konvergent gegen 0.

b) $(a_n) = \left(\frac{4n+1}{n+3}\right)$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(4+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)} = 4$ $\quad (a_n)$ konvergiert gegen 4.

c) $(a_n) = \left(\frac{1-n}{1+n^2}\right)$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{1+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n^2}+1\right)} = 0$ $\quad (a_n)$ ist Nullfolge, also konvergent gegen 0.

d) $(a_n) = \left(\frac{1-n^2}{n}\right)$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1-n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\frac{1}{n}-n\right)}{n} = \lim_{n\to\infty} -n = -\infty$ $\quad (a_n)$ ist divergent.