

Aufgabe 20: Einige Aufgaben in spanischer Sprache.

Ejercicios

20.1) En cada una de las sucesiones siguientes, determine si son P.A. o P.G.

a) $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots$

b) $1; 0,1; 0,01; 0,001; \dots$

c) $\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \dots$

d) $5, 5, 5, 5, \dots$

e) $a, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{8}, \dots \quad a \in \mathbb{N}$

20.2) En la sucesión $x, x^2, 4x^2$ determine qué valor debe tomar x para que ésta sea

a) P.A.

b) P.G.

20.3) Dada la función $f(n) = 2n + 5$, donde $n \in \mathbb{N}$, escriba los cinco primeros valores de $f(n)$.

¿Forman ellos alguna progresión?

20.4) Escriba los cinco primeros términos de la función $f(n) = 3n - 2$ con $n \in \mathbb{N}$. ¿Qué progresión es forma? Determine la diferencia. El primer término y el de lugar 52.

20.5) Encuentre tres números en P.G. sabiendo que si se suma 2 al del medio se forma una P.A. y que los tres números sumados dan 28.

20.6) Encuentre tres números en P.A. sabiendo que si se resta 2 al del medio se transforman en P.G. y que los tres números sumados dan 51.

20.7) Estudie la sucesión $\frac{a-3}{a}, \frac{a-6}{a}, \frac{a-9}{a}$.

Encuentre el décimo término y la suma de los diez primeros términos.

20.8) En una plantación hay 50 filas de árboles, si cada fila tiene 1 árbol más que la anterior y la fila 12 tiene 38 árboles, calcule cuántos árboles hay en la primera fila, en la última fila y cuántos árboles hay en la plantación completa.

Aufgabe 21: Zwei Aufgaben in englischer Sprache.

Exercises

21.1) A geometric sequence has the same first term as an arithmetic sequence. The third term of the geometric sequence is the same as the tenth term of the arithmetic sequence with both being 48. The tenth term of the arithmetic sequence is four times the second term of the geometric sequence. Find the common difference of the arithmetic sequence and the common ratio of the geometric sequence.

21.2) An arithmetic series has a first term of 2 and a fifth term of 30. A geometric series has a common ratio of $-0,5$. The sum of the first two terms of the geometric series is the same as the second term of the arithmetic series. What is the first term of the geometric series?

Lösungen der Aufgaben

20.1) a) P.G. $r = \frac{1}{3}$

b) P.G. $r = \frac{1}{10}$

c) P.A. $d = \frac{1}{4}$

d) P.A. $d = 0$ P.G. $r = 1$

e) P.G. $r = \frac{1}{2}$

20.2) a) P.A.

$$a_1 = x$$

$$a_2 = x + d = x^2 \Rightarrow d = x^2 - x$$

$$a_3 = a_2 + d = x^2 + d = 4x^2 \Rightarrow d = 4x^2 - x = 3x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - x = 3x^2 \Rightarrow 2x^2 + x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

b) P.G.

$$a_1 = x$$

$$a_2 = x \cdot r = x^2 \Rightarrow r^2 = x^2$$

$$a_3 = x \cdot r^2 = 4x^2 \Rightarrow r^2 = 4x$$

$$\Rightarrow x^2 = 4x \Rightarrow x = 4$$

20.3) 7, 9, 11, 13, 15 P.A. $d=2$

20.4) 1, 4, 7, 10, 13 P.A. $d=3$ $a_1=1$ $a_{52}=154$

20.5)

P.A.: $s_3 = 30 = \frac{3}{2}(a_1 + a_3) \Rightarrow a_1 + a_3 = 20$

$$\Rightarrow a_3 = 20 - a_1$$

P.G.: $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_2 + 20 - a_1 = 28$

$$\Rightarrow a_2 = 8 \Rightarrow a_1 = \frac{8}{r} \quad a_3 = 20 - \frac{8}{r}$$

$$\Rightarrow a_2 = 8 = \sqrt{\frac{8}{r} \cdot \left(20 - \frac{8}{r}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{r} \cdot \left(20 - \frac{8}{r}\right) = 64 \Rightarrow r^2 - \frac{5}{2}r + 1 = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = 2 : \mathbf{4, 8, 16} \quad (r_2 = \frac{1}{2} : 16, 8, 4)$$

20.6)

P.A.: $s_3 = 51 = \frac{3}{2}(a_1 + a_3) \Rightarrow a_1 + a_3 = 34$ ①

P.G.: $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_2 - 2 + a_3 = 49$

$$\textcircled{1} \Rightarrow a_2 - 2 = 15 \Rightarrow a_2 = 17$$

$$\Rightarrow \text{P.G.} = a_1, 15, a_3$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \frac{15}{r} + 15r = 34$$

$$\Rightarrow 15r^2 - 34r + 15 = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{5}{3} \quad (r_2 = \frac{3}{5})$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{15}{\frac{5}{3}} = 9, \quad a_3 = 15 \cdot \frac{5}{3} = 25$$

$$\Rightarrow \text{P.G.: } 9, 15, 25 \quad \text{P.A.: } \mathbf{9, 17, 25}$$

20.7)

$$a_2 = \frac{a-6}{a} = \frac{a-3-3}{a} = \frac{a-3}{a} - \frac{3}{a} = a_1 - \frac{3}{a}$$

$$a_3 = \frac{a-9}{a} = \frac{a-6-3}{a} = \frac{a-6}{a} - \frac{3}{a} = a_2 - \frac{3}{a}$$

$$\Rightarrow \text{P.A.: } d = -\frac{3}{a} \quad a_{10} = \frac{a-30}{a},$$

$$s_{10} = 5 \left(\frac{a-3}{a} + \frac{a-30}{a} \right) = \frac{10a-165}{a}$$

20.8) P.A.: $d=1$, $n=50$, $a_{12} = 38$

$$a_{12} = a_1 + 11 = 38 \Rightarrow a_1 = \mathbf{27},$$

$$a_{50} = a_1 + 49 = \mathbf{76}, \quad s_{50} = 25(2 \cdot 27 + 49) = \mathbf{2575}$$

21.1) AP : $(u_n) = u_1, u_2, u_3, \dots$ GP : $(v_n) = v_1, v_2, v_3, \dots$

with $u_1 = v_1 = a_1$

$$u_{10} = a_1 + 9d = 48 \quad \text{and} \quad v_3 = a_1 \cdot r^2 = 48$$

$$\Rightarrow a_1 + 9d = a_1 \cdot r^2 = 48 \quad \textcircled{1}$$

$$u_{10} = 4 \cdot v_2 \Rightarrow a_1 + 9d = 4 \cdot a_1 \cdot r \quad \textcircled{2}$$

① und ② gleichsetzen: $a_1 \cdot r^2 = 4 \cdot a_1 \cdot r \Rightarrow r = \mathbf{4}$

In ① einsetzen: $a_1 \cdot 4^2 = 48 \Rightarrow a_1 = \mathbf{3}$

In ① einsetzen: $3 + 9d = 48 \Rightarrow d = \mathbf{5}$

$$\Rightarrow \text{AP: } 3, 8, 13, 18, \dots \quad \text{GP: } 3, 12, 48$$

21.2) AP : $(u_n) = u_1, u_2, u_3, \dots$ $u_1 = 2$, $u_5 = 30$

GP : $(v_n) = v_1, v_2, v_3, \dots$ $r = -0,5$, $v_1 + v_2 = u_2$

AP: $u_5 = u_1 + 4d \Rightarrow 30 = 2 + 4d \Rightarrow d = 7$

$$u_2 = u_1 + d \Rightarrow u_2 = 9$$

GP: $r = -0,5$, $v_1 + v_2 = 9$, $v_2 = v_1 \cdot r$

$$\Rightarrow v_1 + v_1 \cdot r = v_1 - 0,5 \cdot v_1 = 9$$

$$\Rightarrow v_1 = \mathbf{18}$$