1. Geometrische Reihe

Definition: Die Summe $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_1 \cdot q^{k-1})$

einer geometrischen Zahlenfolge (a_n) heißt **geometrische Reihe.**

Berechnung der n-ten Summe einer geometrischen Reihe

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2 = a_1 + a_1 \cdot q$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2$

…

…

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1}$

Es ist also:

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} \qquad (1)$$

Wir multiplizieren die Gleichung (1) mit q und erhalten:

$$q \cdot s_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^n \qquad (2)$$

Wir schreiben geschickt diese beiden Gleichungen passend untereinander und subtrahieren Gleichung (2) von Gleichung (1) . Dann ergibt sich:

$$\begin{array}{lccccccc|l} s_n = & a_1 & + a_1 \cdot q & + a_1 \cdot q^2 & + \ldots & + a_1 \cdot q^{n-1} & & & (1) \\ & & & & & & & & - \\ q \cdot s_n = & & a_1 \cdot q & + a_1 \cdot q^2 & + \ldots & + a_1 \cdot q^{n-1} & + a_1 \cdot q^n & & (2) \\ \hline s_n - q \cdot s_n = & a_1 & & & & & - a_1 \cdot q^n & & \end{array}$$

Wir klammern links s_n bzw. rechts a_1 aus, teilen durch $(1-q)$ und erweitern den Bruch mit (-1):

$$\begin{aligned} s_n - q \cdot s_n &= a_1 - a_1 \cdot q^n && \vert \text{ ausklammern} \\ s_n \cdot (1-q) &= a_1 \cdot (1-q^n) && \vert : (1-q),\ q \neq 1 \\ s_n &= a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} && \vert \cdot \frac{-1}{-1} \\ s_n &= a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1} \end{aligned}$$

Der n-te Summenwert einer geometrischen Reihe ist:

$$\mathbf{s_n} = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 \cdot q^{k-1} = \mathbf{a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}} = \mathbf{a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}} \qquad (q \neq 1)$$

Um bei dem Bruch mit positivem Zähler und Nenner zu rechen, benutzt man oft am besten

- das erste Produkt $\mathbf{s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}$, wenn $\mathbf{|q| < 1}$ ist,
- das zweite Produkt $\mathbf{s_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}}$, wenn $\mathbf{|q| > 1}$ ist.

Aufgabe 14:

a) Berechne die Summe der ersten 9 Glieder der geometrischen Folge 2, 4, 8, 16, …!

b) Berechne die Summe der ersten 7 Glieder der geometrischen Folge 5, –15, 45, –135, …!

c) Berechne die Summe der ersten 12 Glieder der geometrischen Folge $24, 18, \frac{27}{2}, \frac{81}{8}$, …!

d) Berechne die Summe der ersten 10 Glieder der geometrischen Folge 20, –30, 45, –67,5 , …!

Aufgabe 15:

Berechne die Summe der ersten n Potenzen von 3! Gib den Wert für n = 10 an!

Aufgabe 16:

Das zweite Glied einer geometrischen Folge ist –30, die Summe der ersten beiden Glieder ist –15.

a) Berechne den Faktor q! b) Berechne die ersten 5 Folgenglieder!

Aufgabe 17:
a) Eine geometrische Folge hat 9 Glieder, deren Summe 3577 ist. Der Faktor q ist 2. Wie lautet das erste Glied?

b) Eine geometrische Folge hat eine Summe von $32\frac{1}{16}$, das dritte Glied ist 12 und der Faktor q ist $-\frac{1}{2}$.
Wie viele Glieder hat die Folge?

Aufgabe 18:
Ein Computer verliert jedes Jahr 30% seines Wertes.
a) Gib eine Formel für den Wert des Computers nach n Jahren an!
b) Nach wie vielen Jahren ist der Computer weniger wert als 10% seines Anfangswertes?

Aufgabe 19: *(Nachtrag zu geometrischen Folgen)*

Warum heißt die geometrische Folge „geometrische“ Folge? Deshalb:

Das mittlere Glied a_k dreier beliebiger, direkt aufeinander folgender Glieder a_{k-1} , a_k , a_{k+1} einer geometrischen Folge ist gleich dem geometrischen Mittel $\sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$ der beiden anderen Glieder.

Beweise diese Aussage!

Lösungen der Aufgaben

14 a) $a_1 = 2$, $q = a_2 : a_1 = 2$, $n=9$ $\Rightarrow$ $s_9 = a_1 \cdot \frac{q^9 - 1}{q-1} = 2 \cdot \frac{2^9 - 1}{2-1} = 1022$

b) $a_1 = 5$, $q = -3$, $n=7$ $\Rightarrow$ $s_7 = a_1 \cdot \frac{q^7 - 1}{q-1} = 5 \cdot \frac{(-3)^7 - 1}{-3-1} = 2735$

c) $a_1 = 24$, $q = \frac{3}{4}$, $n=12$ $\Rightarrow$ $s_{12} = a_1 \cdot \frac{1-q^{12}}{1-q} = 24 \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{12}}{1-\frac{3}{4}} \approx 92{,}95907$

d) $a_1 = 20$, $q = -1{,}5$, $n=10$ $\Rightarrow$ $s_{10} = a_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q-1} = 20 \cdot \frac{(-1{,}5)^{10} - 1}{-1{,}5-1} = -\frac{58025}{128} \approx -453{,}32$

15) $a_1 = 3$, $q = 3$ $\Rightarrow$ $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = 3 \cdot \frac{3^n - 1}{3-1} = \mathbf{\frac{3}{2}(3^n - 1)}$

Für n = 10 ergibt sich: $s_{10} = \frac{3}{2}(3^{10} - 1) = 88572$

16 a) $a_2 = -30$ $\Rightarrow$ $a_1 \cdot q = -30$ $\Rightarrow$ $a_1 = \frac{-30}{q}$ (1)

$a_1 + a_2 = -15$ $\Rightarrow$ $-15 = a_1 \cdot \frac{q^2 - 1}{q-1}$ (2)

(1) in (2) einsetzen: $-15 = \frac{-30}{q} \cdot \frac{q^2 - 1}{q-1}$

Mit dem 3. binomischen Gesetz folgt: $\frac{-30}{q} \cdot \frac{(q-1)\cdot(q+1)}{q-1} = -15$.

Kürzen mit (q–1) ergibt: $\frac{-30}{q} \cdot (q+1) = -15$ $\Rightarrow$ $-30q - 30 = -15q$ $\Rightarrow$ $\mathbf{q = -2}$

b) q in (1) einsetzen: $\mathbf{a_1 = 15}$ Die ersten 5 Glieder sind: 15, –30, 60, –120, 240, …

17 a) $s_9 = 3577$, $q=2$, $n=9$ $\Rightarrow$ $3577 = a_1 \cdot \frac{2^9 - 1}{2-1} = a_1 \cdot 511$ $\Rightarrow$ $a_1 = 7$

b) $a_3 = 12$, $q = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $a_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 12$ $\Rightarrow$ $\mathbf{a_1 = 48}$

$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, $s_n = 32\frac{1}{16} = \frac{513}{16}$ $\Rightarrow$ $\frac{513}{16} = 48 \cdot \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 32 - 32 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ $\Rightarrow$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{512}$

$\Rightarrow \mathbf{n = 9}$ Die Folge hat 9 Glieder.

18 a) $W_n = W_0 \cdot (0{,}7)^n$

b) $\frac{1}{10} W_0 = W_0 \cdot (0{,}7)^n$ $\Rightarrow$ $n \approx 6{,}46$

Nach ca. sechseinhalb Jahren ist der Computer weniger als 10% seines Anfangswertes wert.

19) $a_{k-1} = a_1 \cdot q^{k-2}$ $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$ $a_{k+1} = a_1 \cdot q^k$

$$\sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}} = \sqrt{a_1 \cdot q^{k-2} \cdot a_1 \cdot q^k} = \sqrt{a_1{}^2 \cdot q^{2(k-1)}} = a_1 \cdot q^{k-1} = a_k$$