IV. Reihen

Wenn man die Glieder einer Folge (a_n) addiert, ergibt das eine sogenannte Reihe:

Definition: Die Summe $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ einer Zahlenfolge (a_n) heißt **n-ter Summenwert** oder **n-te Partialsumme** der Folge (a_n).

Diese Partialsummen bilden wiederum eine Folge (s_n):

Definition: Die Folge $\mathbf{(s_n)}$ der Partialsummen einer Folge (a_n) heißt **Reihe** (oder Partialsummenfolge).

Anmerkung: Häufig wird in der Literatur bereits die Partialsumme $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ als Reihe bezeichnet!
Das machen wir in diesem Schriftstück auch!

1. Arithmetische Reihe

Definition: Die Summe $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_1 + (k-1) \cdot d)$ einer arithmetischen Zahlenfolge (a_n) heißt **arithmetische Reihe.**

Berechnung der n-ten Summe einer arithmetische Reihe

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2 = a_1 + (a_1 + d)$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2 \cdot d)$

…

…

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2 \cdot d) + \ldots + (a_1 + (n-1) \cdot d)$

Wenn wir nun ähnlich wie Gauss verfahren (vgl. Kasten rechts) und das erste Glied a_1 mit dem letzten a_n addieren, das zweite a_2 mit dem zweitletzten a_{n-1}, usw., bekommen wir Folgendes:

$a_1 + a_n$	$a_2 + a_{n-1}$	$a_3 + a_{n-2}$	…	$a_n + a_1$

=

$a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d$	$a_1 + d + a_1 + (n-2) \cdot d$	$a_1 + 2 \cdot d + a_1 + (n-3) \cdot d$	…	$a_1 + (n-1) \cdot d + a_1$

=

$2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d$	$2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d$	$2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d$	…	$2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d$

Die einzelnen n Summen sind alle gleichwertig und wir haben die Summe mit sich selbst addiert. Das bedeutet: $2 \cdot s_n = n \cdot (2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d)$.

Wir teilen durch 2 und haben:

Der n-te Summenwert einer arithmetischen Reihe ist:

$$\mathbf{s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}\left(2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\right) = n \cdot a_1 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot d}{2} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

Während der Schulzeit des bedeutenden deutschen Mathematikers CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 bis 1855) passierte Folgendes: Der Lehrer wollte etwas Ruhe haben und stellte daher seinen Schülern eine komplizierte Aufgabe, um sie etwas länger zu beschäftigen. Sie sollten die Zahlen von 1 bis 100 addieren.

Der Lehrer hatte die Aufgabe gerade formuliert, da rief der **neunjährige** GAUSS mit 5050 bereits das richtige Ergebnis.
GAUSS hatte nicht wie seine Mitschüler 1+2+3+… gerechnet, sondern einfach überlegt, dass die Summen 100+1, 99+2, 98+3, …, 51+50 jeweils 101 ergeben und dass man genau 50 derartige Zahlenpaare bilden kann, womit sich als Ergebnis 50·101=5050 ergibt. Damit hatte er im Prinzip die Summenformel der arithmetischen Reihe entdeckt.

Aufgabe 9:

a) Berechne die Summe der ersten 20 Glieder der arithmetischen Folge $-2, 1, 4, 7, \ldots$!

b) Berechne die Summe der ersten 35 Glieder der arithmetischen Folge $-\frac{3}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \ldots$!

Aufgabe 10:

a) Berechne die Summe der ersten n natürlichen Zahlen! Gib den Wert für n = 1000 an!

b) Berechne die Summe der ersten n geraden natürlichen Zahlen! Gib den Wert für n = 1000 an!

c) Berechne die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen! Gib den Wert für n = 1000 an!

Aufgabe 11:

Das dritte Glied einer arithmetischen Folge ist Null, die Summe der ersten 15 Glieder ist –300.

a) Berechne das erste Glied!

b) Berechne die Summe der ersten 10 Glieder!

Aufgabe 12:

Der ehemalige COALNIC-Schüler Pablo hat das IB gemacht und in Deutschland Betriebswirtschaft und Mathematik studiert. Er kommt nach Managua zurück und eröffnet zusammen mit seinem Bruder einen neuen Laden für Computer und Handys. Sein Markt-Hit sollen nicht-gebrandete Smartphones einer koreanischen Marke sein.

Im ersten Monat verkauft er 20 dieser Smartphones, im zweiten 23 und im dritten 26. Er geht davon aus, dass sich dieser Trend fortsetzt und erwartet also den Verkauf entsprechend der – wie er als guter Mathematiker weiß - arithmetischen Folge 20, 23, 26,…

Wenn seine Erwartung eintrifft, kann er nach wie vielen Monaten mit seinem Bruder den Verkauf des tausendsten Smartphones feiern?

Aufgabe 13: *(Nachtrag zu arithmetischen Folgen)*

Warum heißt die arithmetische Folge „arithmetische“ Folge? Deshalb:

Das mittlere Glied a_k dreier beliebiger, direkt aufeinander folgender Glieder a_{k-1} , a_k , a_{k+1} einer arithmetischen Folge ist gleich dem arithmetischen Mittel $\frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$ der beiden anderen Glieder.

Beweise diese Aussage!

Lösungen der Aufgaben

9 a) $a_1 = -2$, $d = a_2 - a_1 = 3$, $n=20$ $\Rightarrow$ $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot d}{2} = 20 \cdot (-2) + \frac{20\cdot 19\cdot 3}{2} = 530$

b) $a_1 = -\frac{3}{8}$, $d = \frac{1}{4}$, $n=35$ $\Rightarrow$ $s_n = 35 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) + \frac{35\cdot 34\cdot \frac{1}{4}}{2} = \frac{1085}{8}$

10 a) $a_1 = 1$, $d = 1$ $\Rightarrow$ $s_n = \frac{n}{2}\left(2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\right) = \frac{n}{2}\left(2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 1\right) = \mathbf{\frac{n}{2}(n+1)}$

$s_{1000} = \frac{1000}{2}(1000+1) = 500.500$

b) $a_1 = 2$, $d = 2$ $\Rightarrow$ $s_n = \frac{n}{2}\left(2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\right) = \frac{n}{2}\left(2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 2\right) = \mathbf{n \cdot (n+1)}$

$s_{1000} = 1000 \cdot (1000+1) = 1.001.000$

c) $a_1 = 1$, $d = 2$ $\Rightarrow$ $s_n = \frac{n}{2}\left(2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\right) = \frac{n}{2}\left(2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 2\right) = \mathbf{n^2}$

$s_{1000} = 1000^2 = 1.000.000$

11 a) $a_3=0$, $s_{15} = -300$, $n=15$ $\Rightarrow$ $-300 = \frac{15}{2}\left(2 \cdot a_1 + (15-1) \cdot d\right)$ $\Rightarrow a_1 + 7d = -20 \;\; (1)$

und $a_3 = a_1 + 2d = 0 \quad (2)$

(1) – (2) $\Rightarrow$ $5d = -20$ $\Rightarrow$ $d = -4$

In (2) einsetzen: $a_1 + 2(-4) = 0$ $\Rightarrow$ $a_1 = 8$

b) $s_{10} = \frac{10}{2}\left(2 \cdot 8 + (10-1) \cdot (-4)\right) = -100$

12) $a_1 = 20$, $d = 3$

Da es um die Gesamtzahl der verkauften Smartphones geht, müssen wir nicht mit der Folge 20, 23, 26,… rechnen, sondern mit der Reihe $1000 = s_n = \frac{n}{2}\left(2 \cdot 20 + (n-1) \cdot 3\right)$

$1000 = \frac{n}{2}\left(2 \cdot 20 + (n-1) \cdot 3\right) = \frac{n}{2}(37 + 3n)$ $\Rightarrow$ $3n^2 + 37n - 2000 = 0$ $\Rightarrow$ $n \approx 20{,}37$

(Die zweite Lösung der quadratischen Gleichung $-32{,}7$ *ist natürlich unsinnig.)*

Die 1000-Stück-Feier kann nach ungefähr 20 Monaten stattfinden.

13) $a_{k-1} = a_1 + (k-2)d$ $\qquad a_k = a_1 + (k-1)d$ $\qquad a_{k+1} = a_1 + kd$

$\frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} = \frac{a_1 + (k-2)d \; + \; a_1 + kd}{2} = \frac{2a_1 + 2kd \; - 2d}{2} = a_1 + kd - d = a_1 + (k-1)d = a_k$