

III. Das Summenzeichen Σ (Sigma, das griechische S)

Für das Arbeiten mit Summen, die aus vielen Summanden bestehen, wird zur Verkürzung der Schreibweise das Summenzeichen Σ verwendet. Wenn n Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ addiert werden sollen, kann man sehr verkürzt dafür schreiben:

$$\sum_{i=1}^n a_i$$

Die Angaben „ $i=1$ “ bzw. „ n “ kann man – besonders in gedruckten Schriften wie hier – auch rechts unten bzw. oben vom Zeichen Σ schreiben:

$$\sum_{i=1}^n a_i$$

In handschriftlicher Form werden generell die Indizes unterhalb bzw. oberhalb des Zeichens Σ geschrieben.

Die Angabe $\sum_{i=1}^n a_i$ bedeutet ausgesprochen: „Die Summe aller a_i von $i=1$ bis n “. Also:

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Erläuterung:

i : ist der laufende Index der Zahlen a_i . (Man nennt i auch „Laufvariable“)

($i=$) 1 : Die Zahl unter dem Summenzeichen gibt an, welche Zahl a_i für i als erstes eingesetzt wird.

Das Einsetzen ergibt den ersten Summanden, hier a_1 .

Danach wird i um 1 erhöht, der Wert wird wieder in die Formel unter dem Summenzeichen eingesetzt und zum ersten Wert addiert. Das wird fortgesetzt, bis die Zahl n , die über dem Summenzeichen steht, erreicht ist.

n : Die Zahl über dem Summenzeichen gibt an, welche Zahl a_i für i als letztes eingesetzt wird.

Das Einsetzen ergibt den letzten Summanden, hier a_n .

Beispiel: Die Summe der ersten fünf Quadratzahlen kann man schreiben als: $\sum_{i=1}^5 i^2$

Es ist also: $\sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$

Aufgabe 7:

Schreibe folgende Ausdrücke als Summe!

a) $\sum_{k=1}^5 k^3$ b) $\sum_{m=3}^5 (m+1)^2$ c) $\sum_{i=4}^6 (2i-3) \cdot \sqrt{i}$ d) $\sum_{k=1}^4 \sin\left(\frac{k}{2} \cdot \pi\right)$

Aufgabe 8:

Schreibe folgende Aufgaben mit dem Summenzeichen!

a) Die Summe der natürlichen Zahlen von 37 bis 86.

b) Die Summe der Quadrate aller ungeraden natürlichen Zahlen, die kleiner als 100 sind.

Lösungen der Aufgaben

$$7 \text{ a) } \sum_{k=1}^5 k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$$

$$b) \sum_{m=3}^5 (m+1)^2 = (3+1)^2 + (4+1)^2 + (5+1)^2 = 4^2 + 5^2 + 6^2$$

$$c) \sum_{i=4}^6 (2i-3) \cdot \sqrt{i} = (2 \cdot 4 - 3) \cdot \sqrt{4} + (2 \cdot 5 - 3) \cdot \sqrt{5} + (2 \cdot 6 - 3) \cdot \sqrt{6} = 5 \cdot \sqrt{4} + 7 \cdot \sqrt{5} + 9 \cdot \sqrt{6}$$

$$d) \sum_{k=1}^4 \sin\left(\frac{k}{2} \cdot \pi\right) = \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi\right) + \sin\left(\frac{2}{2} \cdot \pi\right) + \sin\left(\frac{3}{2} \cdot \pi\right) + \sin\left(\frac{4}{2} \cdot \pi\right) \\ = \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi\right) + \sin(\pi) + \sin\left(\frac{3}{2} \cdot \pi\right) + \sin(2\pi)$$

$$8 \text{ a) } \sum_{k=37}^{86} k \qquad b) \sum_{k=1}^{50} (2k-1)$$