

II. Besondere Folgen

Neben einigen anderen (z.B. Fibonacci-Folge) gibt es zwei Typen von Folgen, die in der Mathematik eine große Rolle spielen.

1. Arithmetische Folge

Definition: Eine Zahlenfolge (a_n) heißt **arithmetische Folge**, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist: $a_{n+1} - a_n = d$.

Eine arithmetische Folge ist durch ihr Anfangsglied a_1 und die Differenz d eindeutig bestimmt!

Beispiele

- a) Die Folge $(a_n) = (n) = 1, 2, 3, 4, \dots$ der natürlichen Zahlen
- b) Die Folge $(a_n) = (2n-1) = 1, 3, 5, 7, \dots$ der ungeraden Zahlen
- c) Die Folge $(a_n) = (57-5n) = 52, 47, 42, 37, \dots$
- d) Die Bestände B_n bei einem linearen Wachstum bilden eine arithmetische Folge.

Berechnung des n-ten Gliedes einer arithmetische Folge

Aus der Definition ergibt sich: $a_2 - a_1 = d \Rightarrow a_2 = a_1 + d$ und damit:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2 \cdot d \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 2 \cdot d + d = a_1 + 3 \cdot d \\ &\dots \\ &\dots \\ a_n &= a_{n-1} + d = a_1 + (n-2) \cdot d + d = a_1 + (n-1) \cdot d \end{aligned}$$

Es ergibt sich also:

Das n-te Glied a_n einer arithmetischen Folge kann berechnet werden mit: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Aufgabe 2: Berechne das siebte Glied a_7 und das zehnte Glied a_{10} einer arithmetischen Folge (a_n) mit:

- a) $a_1 = 2$ und $a_5 = 14$
- b) $a_1 = 3$ und $a_6 = 15$
- c) $a_2 = 2$ und $a_6 = -23$
- d) $a_4 = 6$ und $a_6 = 18$
- e) $a_3 = -6$ und $a_6 = 8$
- f) $a_5 = -9$ und $a_9 = -17$

Aufgabe 3: Herr Meier hat sich ein neues Auto gekauft für 25.600,00 €. Das Auto verliert jeden Monat 90 € an Wert. Wie lange dauert es, bis das Auto einen Wert von unter 15.000,00 € hat?

2. Geometrische Folge

Definition: Eine Zahlenfolge (a_n) heißt **geometrische Folge**, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ ($q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$, $a_n \neq 0$)

Eine geometrische Folge ist durch ihr Anfangsglied a_1 und den Quotienten q eindeutig bestimmt!

Beispiele

a) Die Folge $(a_n) = (2^n) = 2, 4, 8, 16, \dots$ der Quadratzahlen von 2.

b) Die Folge $(a_n) = (2 \cdot 3^n) = 6, 18, 54, 162, \dots$

c) Die Folge $(a_n) = (200 \cdot 0,1^n) = 200, 20, 2, 0,2, 0,02, \dots$

d) Die Bestände B_n bei einem exponentiellem Wachstum bilden eine geometrische Folge.

Berechnung des n-ten Gliedes einer geometrischen Folge

Aus der Definition ergibt sich: $\frac{a_2}{a_1} = q \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q$ und damit:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

...

...

$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-2} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Es ergibt sich also:

Das n-te Glied a_n einer geometrischen Folge kann berechnet werden mit: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Aufgabe 4: Berechne das sechste Glied a_6 und das achte Glied a_8 einer geometrischen Folge (a_n) mit:

a) $a_1 = 4$ und $a_4 = 108$ b) $a_1 = 3$ und $a_5 = \frac{243}{16}$ c) $a_2 = 50$ und $a_5 = 6250$

d) $a_2 = 0,1$ und $a_4 = 2,5$ e) $a_3 = -1,2$ und $a_7 = -0,00192$

Aufgabe 5: Auf einem Bankkonto befindet sich ein Kapital K_0 , welches jährlich mit p % verzinst wird.

a) Wie groß ist das Kapital K_n nach n Jahren?

b) Wann hat sich das Kapital verdoppelt, wenn $p = 5$ % ist?

Aufgabe 6: Gegeben ist die geometrische Folge $(a_n) = \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{27}{2}, \frac{81}{2}, \dots$

a) Berechne q !

b) Gib das Bildungsgesetz der Folge an!

c) Berechne a_9 !

Lösungen der Aufgaben

2 a) $d=3$, $a_7 = 20$, $a_{10} = 29$ b) $d=2,4$, $a_7 = 17,4$, $a_{10} = 24,6$ c) $d=-6,25$, $a_7 = -29,25$, $a_{10} = -48$

d) $d=6$, $a_7 = 24$, $a_{10} = 42$ e) $d=\frac{14}{3}$, $a_7 = \frac{38}{3}$, $a_{10} = \frac{80}{3}$ f) $d=-2$, $a_7 = -13$, $a_{10} = -19$

3) $a_n = 25600 + (n-1) \cdot (-90) = 25690 - 90 \cdot n \Rightarrow 15000 = 25690 - 90 \cdot n \Rightarrow n = 118,78$

Das Auto hat nach 119 Monaten einen Wert von unter 15.000,00 € .

4 a) $q=3$, $a_6 = 972$, $a_8 = 8748$ b) $q=\frac{3}{2}$, $a_6 = \frac{729}{32}$, $a_8 = \frac{6561}{128}$ c) $q=5$, $a_6 = 31.250$, $a_8 = 781.250$

d) $q=5$, $a_6 = 62,5$, $a_8 = 1562,5$ e) $q=0,2$, $a_6 = 0,0096$, $a_8 = 0,000384$

5 a) $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

b) $2 \cdot K_0 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^n \Rightarrow n = \frac{\lg(2)}{\lg(1,05)} \approx 14,2$ Das Kapital hat sich nach ungefähr 14 Jahren verdoppelt.

6 a) $q = \frac{a_2}{a_1} = -3$ b) $a_n = \frac{1}{2} \cdot (-3)^{n-1}$ c) $a_9 = \frac{1}{2} \cdot (-3)^8 = \frac{6561}{2}$