I. Folgen

1. Definition einer Folge

Eine **Folge** ist eine Funktion, deren Definitionsbereich die Menge der natürlichen Zahlen ist: $\mathbb{D}=\mathbb{N}$

Eine Folge ist also, wenn nichts anderes gesagt ist, generell **unendlich.**

Ist die Definitonsmenge nicht ganz $\mathbb{N}$, sondern nur eine endliche Teilmenge $\mathbb{D} \subset \mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen , so heißt die Folge eine **endliche Folge**.

Beispiele

a) Den Zahlen 1 bis 26 wird der (Groß-)Buchstabe im Alphabet zugeordnet:

n = Stelle im Alphabet	1	2	3	4	…	24	25	26
a_n = Buchstabe	A	B	C	D	…	X	Y	Z

b) Ein Taxifahrer schreibt jeden Tag die Anzahl der gefahrenen Kilometer auf:

n = Tag	1	2	3	4	…
a_n = Strecke in km	135	217	196	189	…

c) Jedem Monat eines Jahres wird die durchschnittliche Höchsttemperatur zugeordnet:

n = Monat	1	2	3	4	…	11	12
a_n = durchschnittliche Höchsttemperatur in °C	–3	9	15	18	…	17	3

2. Zahlenfolgen

Ordnet man jeder natürlichen Zahl **n** eine reelle Zahl $\mathbf{a_n}$ zu, ist also der Wertebereich $\mathbb{W}\subset\mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen, so heißt die Folge eine **Zahlenfolge**.

Die einzelnen Elemente einer Zahlenfolge werden **Glieder** der Folge genannt und mit $\mathbf{a_n}$ (oder b_n, c_n,…) bezeichnet.

Die Folge wird mit $\mathbf{(a_n)}$ (oder (b_n), (c_n),…) bezeichnet.

Darstellung von Zahlenfolgen

a) Eine Zahlenfolge kann in Form einer Tabelle dargestellt werden:

n	1	2	3	4	…
a_n	a_1	a_2	a_3	a_4	…

b) Daraus ergibt sich, dass eine Zahlenfolge in Form einer Punktmenge eines Koordinatensystems dargestellt werden kann: $(a_n) = \{ (1|a_1), (2|a_2), (3|a_3), (4|a_4), ...\}$

c) Da die einzelnen Punkte der Reihe nach geordnet sind, kann man die erste Zahl weglassen und schreiben:

$(a_n) = \{ a_1, a_2, a_3, a_4, ...\}$ beziehungsweise einfach nur:

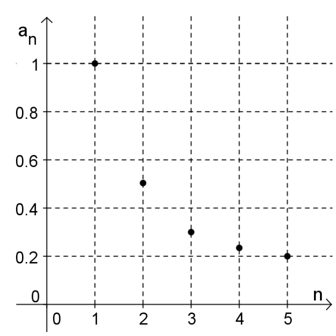
$(a_n) = a_1, a_2, a_3, a_4, ...$

d) Gibt es eine Regel zur Berechnung der einzelnen Glieder a_n einer Folge (a_n) , so kann man diese direkt hinschreiben.

Beispiel: $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ ist die Folge der Brüche

$(a_n) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$ oder einfach nur $(a_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$

Der Graph dazu ist rechts gezeichnet.



Explizite Darstellung einer Zahlenfolge

Wenn man das allgemeine Glied a_n einer Zahlenfolge direkt hinschreiben kann, nennt man dies die **explizite Darstellung** der Zahlenfolge.

Beispiele von Zahlenfolgen mit expliziter Darstellung:

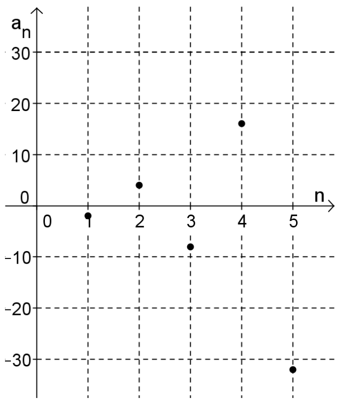
a) $(a_n) = (n)$: $(a_n) = 1, 2, 3, 4, ...$

b) $(a_n) = n^2$: $(a_n) = 1, 4, 9, 16, ...$

c) $(a_n) = (5^{n-1} - n)$: $(a_n) = 0, 4, 24, 124, ...$

d) $(a_n) = (-1)^n \cdot 2^n$: $(a_n) = -2, 4, -8, 16, -32, 64, ...$

Dies ist eine sogenannte **alternierende Zahlenfolge**, weil von Glied zu Glied das Vorzeichen wechselt.



Rekursive Darstellung einer Zahlenfolge

Wenn man das allgemeine Glied $\mathbf{a_n}$ einer Zahlenfolge aus dem vorherigen Glied (und eventuell weiteren) ermitteln kann, nennt man dies die **rekursive Darstellung** der Zahlenfolge. In diesem Fall benötigt man zusätzlich mindestens die Angabe des ersten Gliedes $\mathbf{a_1}$.

Beispiele von Zahlenfolgen mit rekursiver Darstellung:

a) $a_1 = 3$, $a_n = 2 \cdot a_{n-1} - 2$: $(a_n) = 1, 4, 6, 10, 18, ...$

b) $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = (a_{n-1} + a_{n-2})$ für $n>2$: $(a_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$

(Fibonacci-Folge, vgl. http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html (engl.))

<u>Hinweis</u>: Nicht jede Zahlenfolge kann explizit oder rekursiv hingeschrieben werden!

Beispiel: Jeder natürlichen Zahl wird die Anzahl ihrer Teiler zugeordnet.

(vgl. auch: Beispiele b und c aus Abschnitt 1)

Aufgabe 1: Gib die ersten 6 Glieder der Folge an und zeichne sie in ein Koordinatensystem!

a) $(a_n) = \left(\frac{2n}{5}\right)$, b) $(a_n) = (-1)^{\mathbf{n}}$, c) $(a_n) = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$, d) $(a_n) = \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)$, e) $(a_n) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)\right)$, f) $(a_n) = (3 \cdot 2^n)$

g) $a_1 = 1$, $a_n = 2 + a_{n-1}$, h) $a_1 = 1$, $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$, i) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{a_{n-1}}$, k) $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + 2 \cdot n + 1$

Lösungen der Aufgaben

1 a) $\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{8}{5}, 2, \frac{12}{5}, \ldots$ b) –1, 1, –1, 1, –1, 1,… c) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots$ d) $\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{7}{11}, \frac{9}{14}, \frac{11}{17}, \frac{13}{20}, \ldots$

e) 1, 0, –1, 0, 1, 0, … f) 6, 12, 24, 42, 96, 192, … g) 1, 3, 5, 7, 9, 11, … h) 1, 2, 4, 8, 16, 32, …

i) $\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \ldots$ k) 2, 7, 14, 23, 34, 47, …